**Лекція 3**

* 1. **Ранг матриці**

Поняття мінора можна ввести і для прямокутної матриці. Для цього треба з прямокутної матриці викреслити стільки рядків і стовпців, щоб після закреслювання утворювалась квадратна матриця. Наприклад, для матриці

*A*=

можна побудувати чотири квадратні матриці третього порядку:

=.=.

=.=.

Кожний з визначників цих матриць буде мінором матриці *А.*

Якщо матриця має відмінний від нуля мінор порядку *r,* а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число *r* називається **рангом матриці.** Позначення: *r = rang А.*

Ранг нуль-матриці за означенням вважають рівним нулю. Відмінний від нуля мінор найвищого поряд­ку називається **базисним.** Зрозуміло, що у матриці може бути де­кілька базисних мінорів. Стовпці матриці, на яких міститься базис­ний мінор, називаються **базисними стовпцями,** а рядки, на яких він лежить - **базисними рядками.**

**Теорема 3.1.  *(про базисний мінор).*** *Базисні стовпці (рядки) лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) довільної матри­ці є лінійною комбінацією базисних рядків (стовпців).*

**Наслідок.** *Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків і це число дорівнює рангу матриці.*

Якщо рядки (стовпці) матриці є координатами векто­рів, то ранг матриці розміру *т ×п* дорівнює числу *r* її лінійно неза­лежних векторів. При цьому

*r* < *т**< п.* Число лінійно незалежних векторів у системі векторів називають **рангом системи векторів**. Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці, яка складається із координат цих векторів.

Для визначення рангу матриці застосовують **метод обвідних мінорів**, що ґрунтується на такій теоремі.

**Теорема 3.2.** *Якщо матриця А містить мінор r-го порядку, який не дорівнює нулю, а всі мінори* (*r* +1*)-го порядку, що обво­дять цей мінор, дорівнюють нулю, то r є рангом матриці.*

**Приклад 3.1*.*** Визначити ранг матриці

*A*=

**Розв'язання.** Запишемо матриці третього порядку.

=,=,

=,=.

Мінор першого порядку, розмішений у верхньому куті матриці , не дорівнює нулю (1 ≠ 0). Обвідний її мінор другого порядку також не дорівнює нулю.

=5≠0.

Обвідний мінор третього порядку матриці

=0.

Інші матриці ,, дадуть ті самі результати, що і матриця .

**Відповідь***: rang (А) =* 2

Для обчислення рангу матриці *А* застосовується також **метод елементарних перетворень.**

Елементарними перетвореннями матриці є:

1) перестановка рядків (стовпців);

2) множення стовпця (рядка) на число, відмінне віл нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число.

Справедлива така теорема.

**Теорема 3.3.** *Елементарні перетворення не змінюють ранга матриці.*

Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна привести до вигляду, коли усі елементи, крім *r* ≤ *min*(*m,n*), дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює *r*.

Дві матриці будуть називатися **еквівалентними**, якщо за допомогою елементарних перетворень з однієї матриці можна отримати іншу. Позначення:.

**Знаходження ранга матриці за допомогою елементарних перетворень**

Матрицю називають **східчастою**, якщовона задовольняє умови:

1. нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче ненульових;
2. номера стовпців, які містять лідерів рядків, зростають (**лідер рядка** – ненульовий елемент рядка з найменьшим номером).

Верхня трикутна матриця є окремим випадком східчастої матриці. Будь-яку матрицю елементарними перетвореннями можна перетворити до східчастого вигляду.



Східчасту матрицю називають **зведеною**, якщо всі лідери рядків дорівнюють одиниці, а над лідерами стоять нулі.



**Алгоритм перетворення матриці до східчастого вигляду (метод Гауса)**

1. Якщо матриця  ще не має східчастого вигляду, то знаходять 1-ий зліва стовпець з лідером. Переставляючи рядки, переміщують рядок, який містить цей лідер, вгору.
2. Додаючи до всіх рядків, які розташовані нижче, цей рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, дістають під лідером нулі.
3. Повторюють кроки 1 і 2 для решти рядків.

**Властивості ранга матриці**

1. Ранг матриці дорівнює найбільшій кількості лінійно назалежних рядків (стовпців) матриці.
2. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.
3. Транспонування матриці, елементарні перетворення матриці і викреслювання нульових рядків (стовпців) не змінюють її ранга.
4. Ранги еквівалентних матриць рівні.

**Приклад 3.2.** Знайти методом Гауса ранг матриці 

**Розв’язання.** ~~ 

Східчастий вид матриці *А* містить 2 ненульових рядки. Отже, *rang A=*2.

**Відповідь**: *rang A=*2.

* 1. **Обернена матриця**

Операція ділення для матриць не запроваджується, но для квадратних матриць можна побудувати аналог ділення – множення на обернену матрицю.

***Оберненою матрицею до квадратної матриці А порядка n називають матрицю  таку, що .***

Матрицю *А*, для якої існує обернена матриця, називають оборотною.

З означення слідує, що матриці *А* і ******взаємообернені і переставні.

**Властивості обернення матриць**

1. Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

***Доведення***. Нехай матриці ****** обернені до матриці *А*. Тоді ******. Отримали протиріччя, яке і є доведенням.

1. .

***Доведення.*** Ця властивість слідує з означення.

1. 

***Доведення.*** 

1. .

***Доведення***.



1. .

***Доведення***.



**Знаходження оберненої матриці за допомогою визначників**

Знайдемо умову оборотності квадратної матриці *А* порядка ***n***, тобто умову існування такої матриці ******, для якої ***.***

Квадратну матрицю називають невиродженою, якщо її визначник не дорівнює 0.

**Теорема 3.4.** (критерій оборотності матриці). Матриця буде мати обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена.

***Доведення.*** Необхідність. За означенням, ******→******, тобто матриця *А* – невироджена.

Достатність. Нехай ******. Покажемо, що вона має обернену.

Доведемо, що , де

, - алгебраїчні доповнення елементів матриці *А*.

З властивостей визначників слідує, що



Отже, . Аналогічно доводимо, що .

Можна записати . Доведено.

Матрицю  називають приєднаною до матриці *А*.

На цій теоремі грунтується **метод приєднаної матриці** знаходження оберненої матриці.

**Схема метода приєднаної матриці.**

Крок 1. Обчислюємо визначник матриці *А*.

Крок 2. Якщо *det A*=0, то обернена матриця не існує.

Якщо *detA*≠0, то будуємо приєднану матрицю .

Крок 3. Обернену матрицю знаходимо за формулою .

***Зауваження***. Правильність обчислень перевіряється умовою ******.

**Приклад 3.3.** Знайти матрицю обернену заданій методом приєднаної

матриці.



**Розв’язання.**

Крок 1. 

Крок 2. Обчислюємо всі алгебраїчні доповнення елементів матриці *А*:



.

Крок 3. Знаходимо обернену матрицю:



Перевірка: .

**Розв’язання матричних рівнянь за допомогою оберненої матриці**

Розглянемо рівняння відносно матриці *Х: АХ=В*, де *А* і *В* – відомі матриці розмірністю  і  відповідно. Розв’язком цього рівняння (якщо воно існує) буде матриця *Х* розмірністю . Якщо матриця *А* має обернену, то існує єдиний розв’язок матричного рівняння . Дійсно, помноживши обидві частини рівняння зліва на матрицю ******, отримаємо: .

Матричне рівняння  з матрицею *А,* що має обернену*,*  має розв’язок .

**Властивості невироджених матриць**

1. .
2. .
3. .
4. .

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то вона називається **виродженою** або **особливою.**

**Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень**

**Алгоритм перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду (метод Гауса – Жордано).**

1. Зводять матрицю до східчастого вигляду (прямий хід метода Гауса).
2. Відкидають нульові рядки (це вже не є елеменарним перетворенням).
3. Останній рядок ділять на його лідера, одержують 1.
4. Додаючи до решти рядків новий останній рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, дістають нулі над одиницею.
5. Повторюють кроки 1-4 для решти рядків (зворотній хід метода Гауса).

Процедуру перетворення матриці до зведеного східчастого вигляду називають **методом Гауса – Жордано**.

Будь-яку квадратну матрицю *n*-ого порядка з лінійно незалежними рядками можна перетворити в одиничну матрицю. Нехай *А* – квадратна матриця

*n*-ого порядка. Дописавши справа від неї одиничну матрицю *Е*, отримаємо матрицю розмірністю , яку називають **розширеною матрицею**.

**Схема знаходження оберненої матриці методом Гауса –Жордано.**

Крок 1. Утворюють розширену матрицю .

Крок 2. Застосовують до матриці прямий хід метода Гауса.

Матрицю *А* приводять до східчастого вигляду, одночасно перетворюючи і праву частину розширеної матриці.

Крок 3. Якщо матриця *Z* – східчаста форма матриці *А*, містить нульові рядки, то роблять висновок про те, що матриця *А* не має оберненої. Якщо матриця *Z* не має нульових рядків, то матриця *А* – має обернену, і матрицю *Z* вже зворотнім ходом метода Гауса перетворюють в одиничну матрицю *Е*. Таким чином розширену матрицю перетворюють до зведеного східчастого вигляду:

~...~.

Крок 4. Виписують матрицю ******- праву частину розширеної матриці.

**Приклад 3.4.** Знайти матрицю обернену заданій методом Гауса - Жордано.



**Розв’язання.**

Крок 1. .

Крок 2.

~

~

~...

Крок 3. Зворотній хід метода Гауса.

... ~~

~

Крок 4. Виписуєм обернену матрицю:

******